

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОТСЕКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА ПО ЗАДАННОМУ ОБЪЕМУ

Мурадов Шмидт Каримович
профессор

Мирзаев Элнур Махманазар ўгли
магистрант 2-го курса

Ҳайитов Жавоҳир Махтумқули ўгли
магистрант 1-го курса

*Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами,
Республика Узбекистан*

Аннотация

В данной работе рассматривается метрические задачи, по которым определится параметров отсеков по поверхностей второго порядка общего вида по наперед заданному объёму. Для этого как пример находится расстояние плоскостей пересекающих трехосного эллипсоида по наперед заданному объёму, которые параллельны координатным плоскостям.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 29 April 2021

Revised form 05 May 2021

Accepted 09 May 2021

Ключевые слова: поверхность, проекция, параметр, метрические задачи, плоскость, горизонтальной плоскость, задача, координата.

В технике и строительстве нередко используется отсеки поверхностей второго порядка (Φ^2), заключающие определенный объем. Может возникнуть задача: как задать отсек определенной поверхности Φ^2 , чтобы он содержал в себе наперед заданный объем.

При заданной поверхности второго порядка общего вида и числовом значении заключенного в ней объема определяется положение плоскостей, перпендикулярных координатным осям или параллельных плоскостям проекции и отсекающих от данных поверхностей Φ^2 наперед заданный объем. По этим данным при помощи общеизвестных формул из математического анализа определяется объем заданной поверхности Φ^2 общего вида, который обозначен буквой V . Часть объемов поверхности Φ^2 , которая наперед задана, обозначим $\vartheta_x, \vartheta_z, \vartheta_y$.

Положение искомых плоскостей определяется параметрами h_x, h_z, h_y зависящими от наперед заданных объемов $\vartheta_x, \vartheta_z, \vartheta_y$ конкретных поверхностей второго порядка.

1. Пусть задан трехосный эллипсоид Φ^2_3 (Φ^2_3 - эллипсоид) (рис. 1), который представим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Где $c > a > b$. Как известно, объем поверхности Φ^2 определяется по формуле

$$V = \int_B^A P(h) dh \quad (2)$$

Где $P(h)$ – площадь эллипса, h – расстояние от начала координат до искомой плоскости.

Известно, что объем поверхностей Φ^2_3 равен $V = \frac{4}{3} \pi abc$.

При сечении данной поверхности профильной плоскостью $\gamma_1 \perp OX$ от стоящий от плоскости XOZ (Π_3) на расстоянии $x = h_x$ получим эллипс. Тогда наперед заданную часть объема поверхности Φ^2_3 можем найти по формуле

$$v_x = \int_{h_x}^a \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - h_x^2) dh_x \quad (3)$$

После вычисления этого интеграла запишем

$$v_x = \frac{\pi bc}{3a^2} (2a^3 + h_x^3 - 3a^2 h_x^2) \quad (4)$$

Так как v_x наперед задан и $\pi bc = 3 V_3 : 4a$.

$$h_x^3 - 3a^2 h_x + 2 \frac{a^3}{v_3} (V_3 - 2v_x) = 0 \quad (5)$$

Это уравнение третьего порядка относительно h_x для решения которого можно воспользоваться формулой Д.Кардана. Действительные корни этого уравнения определяют положение плоскости α_1 которая отсекает от поверхности Φ_3^2 часть с наперед заданным объемом v_x .

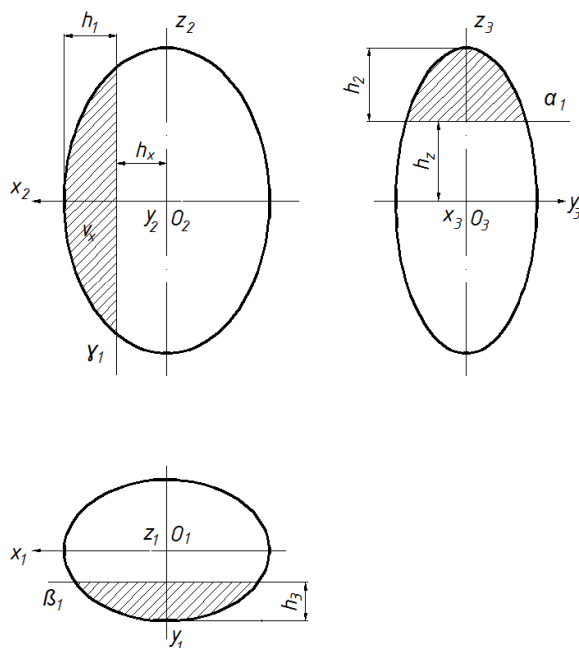


Рисунок 1

Положение горизонтальной плоскости $\alpha_1 \perp OZ$, отстоящей от плоскости XOY (Π_1) на расстоянии $z = h_z$ и отсекающей от поверхности Φ_3^2 наперед заданный объем v_z находим аналогично описанному. Для этого в формулу (2) подставляем параметры горизонтального эллипса, находящегося от начала координат на расстоянии $z = h_z$

$$v_z = \int_{h_z}^{+c} \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - h_x^2) dh_z \quad (6)$$

Вычисляя этот интеграл, после некоторых преобразований для h_z получим следующее уравнение:

$$h_z^3 - 3c^2 h_z + 2 \frac{c^3}{v_3} (V_3 - 2v_z) = 0 \quad (7)$$

Для нахождения корней уравнения (7), определяющих положение искомых плоскостей, также можно использовать формулу Д.Кардана.

Аналогично предыдущим случаям определяем положение фронтальной плоскости $\beta_1 \perp OY$, отстоящей от плоскости XOZ (Π_2) на расстоянии $y = h_y$ и отсекающей от поверхности Φ_3^2 наперед заданный объем v_y при этом получим следующее уравнение:

$$h_y^3 - 3b^2 h_y + 2 \frac{b^3}{v_3} (V_3 - 2v_y) = 0 \quad (8)$$

2. Пуст задан эллиптический параболоид $\Phi_{ЭП}$, который представим уравнением $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, где $p > q$ (9)

Пересекаем поверхность $\Phi_{ЭП}^2$ горизонтальной плоскости $\alpha_1 \perp OZ$ отстоящей от плоскости XOY или параллельной горизонтальной плоскости проекции Π_2 на расстояние $Z = h_z$ тогда получим эллипс.

$$\frac{x^2}{2ph_z} + \frac{y^2}{2qh_z} = 1 \quad (10)$$

Тогда объем сегмента параболоида будет равен

$$V_{Э.п.} = \int_0^{h_1} 2\pi \sqrt{pq} h_z dh_z = \pi \sqrt{pq} \quad (11)$$

$$\text{Откуда} \quad h_z = \sqrt{\frac{V}{\pi}} \quad (12)$$

Из приведенной формулы видно, что при любом значении $V_{Э.п.}$ можно вычислить значение h_z и провести искомую плоскость, обеспечивающую получение наперед заданного объема сегмента эллиптического параболоида.

3. Рассмотрим поверхностей 2-го порядка типа.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{где} \quad c > a > b \quad (13)$$

Поверхность этого типа пересекаем горизонтальной плоскостью, отстоящей от плоскости XOY или параллельной горизонтальной плоскости проекции, на расстоянии $z = h_z$. Тогда получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \delta + \quad (14)$$

Площадь этого эллипса равна

$$p(h_z) = \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 \delta + \quad (15)$$

где — постоянное число. При такой зависимости объем усеченной части поверхности типа (13) равен

$$v_z = \int_B^A \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 \delta + h_z^2) \quad (16)$$

Производя интегрирование (16), получим выражение

$$v_z = \frac{\pi ab}{c^2} \left[c^2 \delta (A - B) + \frac{1}{3} (A^3 - B^3) \right] \quad (17)$$

Эта формула является общей для поверхностей типа (13). Таким образом, наперед заданный объем является функцией от A , B и параметров поверхностей (13).

а) Для эллиптического конуса

($\delta = 0, B = 0, A = h_z$) формула (17) примет

вид $v_z = \frac{\pi ab h_z^3}{3 c^2}$ (18) Откуда

$$h_z = \sqrt[3]{\frac{3 c^2 v_z}{\pi ab}}$$

б) Для эллиптического однополостного гиперboloида ($\delta = 1, B = 0, A =$

получим $v_z = \frac{\pi ab}{3 c^2} (3 c^2 h_z + \quad (19)$

Для нахождения горизонтальной плоскости, отсекающей от этой поверхности заданный объем, необходимо определить корни уравнения

$$h_z^3 + 3 c^2 h_z - \frac{3 c^2 v_z}{\pi ab} = \quad (20)$$

в) Для эллиптического двуполостного гиперboloида

($\delta = -1, B = c, A =$ объем усеченной

части поверхности запишется в виде

$$v_z = \frac{\pi ab}{3 c^2} (h_z^3 - 3 c^2 h_z + 2. \quad (21)$$

При заданной величине значение

h_{z1}, h_{z2}, h_{z3} определяется следующей формуле:

$$h_z^3 - 3 c^2 h_z + 2 \frac{c^2}{\pi ab} (\pi abc - \frac{3}{2} v_z) = 0 \quad (22)$$

Литературы :

1. Мурадов Ш.К. Аналитик- графические методы решения обратных метрических задач и их применение в инженерной графике. Ташкент издательство “ФАН” 1986.

2. Бронштейн.И.Н Семендяев.К.А.Справочник по математике. М.. Наука.1980.

3. Корн. Г. Корн. Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. Наука.1973

4. Фихтенгольц. Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. П. М. Физматгиз. 1959