CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

Volume: 02 Issue: 11 | Nov 2021 ISSN: 2660-5309

Полнота Систем Собственных Векторов Модельного Оператора Нескольких Частиц

Хайруллаев Исматулла Нуруллаевич

кандидат физико-математических наук, доцент Термезский государственный университет

Аннотатсия:

Представлена собственные значение и собственные функции оператора многочастицных моделей, а также полнота системы собственных функций в рассматриваемой пространстве.

ARTICLEINFO

Article history:

Received 30 Sep 2021

Revised form 22 Oct 2021

Accepted 18 Nov 2021

Ключевые слова: физики, гамильтонианов, операторов, квантовой, модель, спектров, векторов, гильбертовых, задачах, частиц, числом.

---***---

В задачах физики твердого тела [1]. квантовой теории поля [2] и статистической физики [3] важную роль играет исследование спектров гамильтонианов с несохраняющимся неограниченным числом частиц. Одним из основных методов, применяемых при изучении этих задач является теория возмущений самосопряженных операторов. Поэтому необходимо подробное изучение спектров гамильтонианов с ограниченпым числом квазичастиц, т. е. изучение спектров сужений операторов, действующих в фоковском пространстве, на одночастичном, двухчастичном и т. д. n-частичном подпространствах или на «n-частичном обрезанном» подпространстве [1-3].

В настоящей работе рассматривается некоторый модельный оператор энергии с несохраняющимся ограниченным числом частиц на «обрезанном трехчастичном» подпространстве и описывается полная система собственных векторов.

Пусть T^{ν}-°-мериый тор, $(T^{\nu})^n$ $\underbrace{T^{\nu} \times T^{\nu} \times \cdots \times T^{\nu}}_{n}$ екартово произведение $L_2(T^{\nu})^n$- гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций на $(T^{\nu})^n$, C'-одномерное комплексное пространство и $L_2^s((T^{\nu})^n) \subset L_2((T^{\nu})^n)$-подлпространство, сосеоящее из симметричных функций. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$ прямая сумма гильбертовых пространств $\mathrm{H}_0 = \mathrm{C}'$, $\mathrm{H}_1 = L_2(T^{\nu}), \mathrm{H}_2 = L_2^s(T^{\nu})^2$, т. е. “обрезанное” пространство Фока.

Рассмотрим операторную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{01} & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Здесь операторы $\mathrm{A}_j \colon \mathrm{H}_j \to \mathrm{H}_i$, $i > j$ (соответственно $\mathrm{i} < j$) являются операторами рождения (соответственно уничтожения) и определяются следующими формулами:

$$(A_{01}f_1)_0 = \int_{T^\nu} b(p')f_1(p')dp', \quad (A_{10}f_0)_1 = b(p)f_0,$$

$$(A_{12}f_2)_1 = \int_T b(q)f_2(p,q')dq', \quad (A_{21}f_1)_2 = \frac{1}{2}(b(q)f_1(p) + b(p)f_1(q)).$$

а операторы A_{11} и A_{22} действуют в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 по формулам

$$(A_{11}f_1)_1 = a_1(p)\int_{T^\nu} a_1(p')f_1(p')dp',$$

$$(A_{22}f_2)_2 = a_2(p)\int_{T^\nu} a_2(p')\,f_2(p',q)dq' + a_2(q)\int_T a_2(q')\,f_2(p,q')dq'.$$

где функции $\mathrm{a}_j, b \in L_2(T^\nu)$ $\quad j = 1,2.$ удовлетворяют условиям

$$\int_{T^\nu} a_1(p)a_2(p)dp = \int_{T^\nu} a_j(p)b(p)dp = 0,\ \ j = 1,2.$$

Очевидно, что число $z = 0$ является собственным значением оператора $A_0 \equiv 0$ с кратностью равной размерности пространства H и оператор A рассматривается как возмущение оператора A_0.

Лемма. Оператор A, определяемый операторной матрицей, является ограниченным и самосопряженным оператором, действующим в гильбертовом пространстве H.

Доказательство этой леммы основано на определениии и элемен- тарных свойствах норм и сопряженного оператора.

Пусть

$$\sigma_{pp} = \left\{ z_1 = 0, \quad z_2 = \|a_2\|^2, \quad z_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\|b\|, \quad z_{5,6} = \pm\sqrt{2\|b\|},\ z_7 = 2\|a_2\|^2, \quad z_{8,9} = \right.$$
$$\left. = \frac{\|a_1\|^2 \pm \sqrt{\|a_1\|^4 + \|b\|^2}}{2}, \quad z_{10,11} = \frac{\|a_2\|^2 \pm \sqrt{\|a_2\|^4 + \|b\|^2}}{2} \right\},$$

где $\|b\|$- норма элемента $b \in L_2(T^\nu)$.

Теперь опишем собственные векторы оператора A, соответствующие его собственным значениям.

Бесконечнократному собственному семейство собственных векторов: значению $z = z_1$ соответствует семейство собственных векторов:

$$\varphi_0 = \big(0,0,f_2(p,q)\big) \tag{2}$$

где $f_2 \in L_2^s((T^\nu)^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_T b(q')\,f_2(p,q')dq' = 0 \quad \text{и} \quad \int_T a_2(p')\,f_2(p',q)dq' = 0$$

и собственный вектор

$$\varphi_1 = \left(1,0,-\frac{b(p)b(q)}{\|b\|^2}\right) \tag{3}$$

Собственное значение $z = z_2$ также бесконечнократное и соответствующее ему семейство собственных векторов имеет вид

$$\varphi_2 = \left(0,0,\frac{a_2(p)\alpha(q) + a_2(q)\alpha(p)}{\|a_2\|^2}\right), \tag{4}$$

гле функция а $\in L_2(T^\nu)$ и $f_2 \in L_2^s((T^\nu)^2)$ удовлетворяет условиям

$$(\alpha, a_2) = 0, \quad (\alpha, b) = 0.$$

Собственные значения $z = z_3$ и $z = z_4$ являются бесконечнократными и им соответствуют собственные векторы

$$\varphi_3 = \left(1, f_1(p), \frac{\sqrt{2}}{2\|b\|}\left(b(p)f_1(q) + f_1(p)b(q)\right)\right), \tag{5}$$

$$\varphi_4 = \left(0, f_1(p), \frac{\sqrt{2}}{2\|b\|}\left(b(p)f_1(q) + f_1(p)b(q)\right)\right), \tag{6}$$

где функция $f_1(p) \in L_2(T^\nu)$ удовлетворяет условиям $(a_1, f_1) = (a_2, f_1) = (b, f_1) = 0$. Собственные значения $z = z_5, z = z_6$ и $z = z_7$ простые и им соответствуют собственные векторы

$$\varphi_5 = \left(1,\frac{\sqrt{2}b(p)}{\|b\|},\frac{b(p)b(q)}{\|b\|^2}\right), \tag{7}$$

$$\varphi_6 = \left(1,\frac{\sqrt{2}b(p)}{\|b\|},\frac{b(p)b(q)}{\|b\|^2}\right), \tag{8}$$

$$\varphi_5 = \left(0,0,\frac{a_2(p)a_2(q)}{\|a_2\|^4}\right), \tag{9}$$

Пусть $z_8,\ z_9,\ z_{10},\ z_{11}$ простые и им соответствуют собственные векторы

$$\varphi_8 = \left(0,\frac{a_1(p)}{\|a_1\|^2},\frac{a_1(p)b(q) + b(p)a_1(q)}{2z_8\|a_1\|^2}\right), \tag{10}$$

$$\varphi_9 = \left(0,\frac{a_1(p)}{\|a_1\|^2},\frac{a_1(p)b(q) + b(p)a_1(q)}{2z_9\|a_1\|^2}\right), \tag{11}$$

$$\varphi_{10} = \left(0,\frac{a_2(p)}{\|a_1\|^2},\frac{a_2(p)b(q) + b(p)a_2(q)}{2(z_{10} - \|a_2\|^2)\|a_2\|^2}\right), \tag{12}$$

$$\varphi_{11} = \left(0,\frac{a_2(p)}{\|a_2\|^2},\frac{a_2(p)b(q) + b(p)a_2(q)}{2(z_{11} - \|a_2\|^2)\|a_2\|^2}\right). \tag{13}$$

Теорема 1. Множество собственных значений $\sigma_{pp}(\mathrm{A})$ совпадает с множеством σ'_{pp}, т.е. $\sigma_{pp}(A) = \sigma'_{pp}$и соответствующие собственные всктoры $\varphi_i(i = \overline{1,11})$, определяются формулами (2) — (13).

Теорема 2. Пусть $\mathrm{M}_1, \cdots, M_{11}$ подпространства собственных векторов, соответствующие собственным значениям $z_1, \cdots, z_{11}$ оператор А, действующим в Н. Тогда $H = \mathrm{M}_1 \oplus \cdots \oplus M_{11}$, т. е. оператора А имеет полную систему собственных векторов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Фридрихс К. Возмущения спектра операторов и гнльбертовом пространстве. М.: Мир. 1972.
2. Mogilner A. J. Hamiltonians of Solid State Physics as fewparticle discrete Shrodinger operatores: problems and results. //Adances to Sovict Mathemalics. 1991. V. 5.
3. Malyshev V. A., Minlos R. A. Invariant Subspaces of clastering operators.// J. Stat. Phys. 1979. V. 21. P. 231-242.