

Использовать Систему Maple Для Определения Свободных Колебаний Прямоугольной Мембраны При Начальных Условиях

Мирзакаримов Эргашбой Мирзобоевич

Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан И.о. доцент

ergashboy.mir@mail.ru

Аннотация:

Работа посвящен изучению математических моделей естественно научных явлений и процессов, изучаемых в гидродинамике, теории упругости, акустике, электродинамике и т.д. Математические модели этих процессов представляют собой краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. В статье рассмотрены основные специальные функции, изучаемые в курсе математической физики. Кроме того, предложены примеры задач, решения для которых получены не аналитически а в системе компьютерной математики Maple. Показано, что интерфейс Maple интуитивно понятен, простота управления параметрами и легкость подготовки графических процедур позволяет легко визуализировать решения математических задач[4,5,8].

ARTICLE INFO

Article history:

Received 26 Nov 2021

Revised form 28 Dec 2021

Accepted 25 Jan 2022

Ключевые слова: мембрана, начальная, граница, собственное значение, собственная функция, эксцентрическая частота, pdsolve, dsolve, simplify, subs.

Введение. В настоящее время специалист по прикладной математике не мыслится без хорошего знания компьютера. К числу наиболее замечательных программ, позволяющих автоматизировать вычисления и высококачественно оформить их, можно отнести программу Maple. Этот пакет широко используется для преподавания математики во многих учебных заведениях. Для студентов Maple является неоценимым помощником в изучении разнообразных математических методов, освобождая их от рутинных математических вычислений и сосредотачивая их внимание на существе изучаемого метода[1,4].

Постановка задачи. Несмотря на свою направленность на серьезные математические вычисления, системы класса Maple необходимы для широкой категории пользователей: студентам и преподавателям вузов, инженерам, аспирантам, научным работникам и даже учащимся математических классов специальных школ. Все они найдут в Maple многочисленные достойные возможности для применения. Данная работа будет продолжением статьи «Определение свободных колебаний прямоугольной мембраны в системе Maple» [5].

Решение задачи.

Пусть мембрана в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=l$, $y=0$ и $y=m$. Задача о колебаниях мембраны сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = F(x, y) - \text{начальное отклонение точек мембраны,} \\ u_t(x, y, 0) = f(x, y) - \text{начальные скорости точек мембраны.} \end{cases} \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(0, y, t) = 0, u(l, y, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, u(x, m, t) = 0. \quad (3)$$

Точки края мембраны закреплены. Решение задачи (1), (2), (3) будем искать в следующем виде [5].

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (4)$$

где $\omega_{k,n} = \pi a \sqrt{(k/l)^2 + (n/m)^2}$ - собственные частоты колебаний мембраны, $a_{k,n}$

и $b_{k,n}$ - неизвестные коэффициенты.

Для удовлетворения начальным условиям (2) возьмем сумму всех частных решений (4) и имеем:

$$u(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = F(x, y), \quad (5)$$

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{k,n} b_{k,n} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = f(x, y). \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) представляют собой разложения функций $F(x, y)$ и $f(x, y)$ двух

переменных в двойные ряды Фурье по системе функций $\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}$. Нетрудно доказать, что

эта система функций ортогональна в области $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m\}$.

С учетом (5) и (6) находим коэффициенты $a_{k,n}$ и $b_{k,n}$ [4]:

$$a_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} dx dy, \quad (7)$$

$$b_{k,n} = \frac{4}{lm \omega_{k,n}} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} dx dy. \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в ряд (4) получим окончательное решение задачи.

Показано, что в системе Maple удобно решать задачу определения вибрации прямоугольной мембраны, заданной начальными условиями.

Пример.1. Определить колебания прямоугольной мембраны с размерами $l=1$, $m=4$ и с начальными условиями $F(x, y) = 4x^2(1-x)y(4-y)$ и $f(x, y)=0$.

Maple da sturi

```
> restart; a:=1;l:=1;m:=4:alpha:=1;a := 1 / l := 1 alpha := 1
```

```
> F(x,y):=4*alpha*x^2*(1-x)*y*(m-y)/l^2;
```

```
F(x,y) := 4x^2(1-x)y(4-y)
```

```
F(x,y):=0;f(x,y) := 0
```

```
> omega [k,n]:=Pi*a*sqrt(k^2*m^2+l^2*n^2)/(l*m);
```

$$\omega_{k,n} := \frac{\pi \sqrt{16k^2 + n^2}}{4}$$

```
> plot3d(F(x,y),x=0..l,y=0..m,title="Начальный профиль мембраны",axes=BOXED,lightmodel=light3, numpoints=1000,orientation=[45,65],shading=ZHUE,style=PATCHCONTOUR);(рис.1)
```

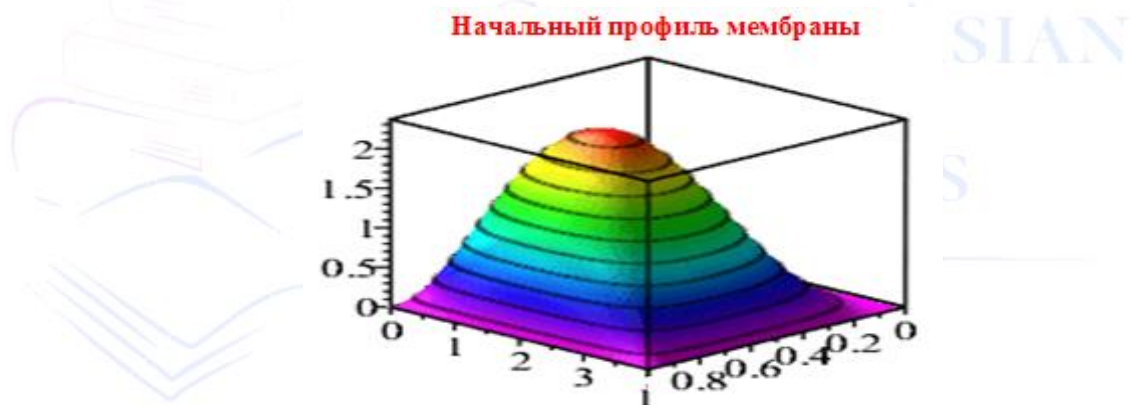


Рис. 1. Начальный профиль мембраны.

```
> A[k,n]:=4/(l*m)*int(int(F(x,y)*sin(Pi*k*x/l)* sin(Pi*n*y/m), x=0..l),y =0..m);
```

$$A_{k,n} := \frac{1}{\pi^7 k^4 n^3} \left(64 \left(\sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi^3 k^2 n + 2 \sin(\pi k) \cos(\pi n) \pi^2 k^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sin(\pi n) \cos(\pi k) \pi^2 k n - 2 \pi^2 \sin(\pi k) k^2 + 2 \sin(\pi n) \pi^2 k n \right. \right. \\ \left. \left. - 6 \sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi n + 8 \cos(\pi n) \cos(\pi k) \pi k + 4 \cos(\pi n) \pi k - 8 \pi k \cos(\pi k) \right. \right. \\ \left. \left. - 12 \sin(\pi k) \cos(\pi n) - 4 \pi k + 12 \sin(\pi k) \right) \right)$$

```
> B [k,n]:=4/(l*m*omega[k,n])*int(int(f(x,y)*sin(Pi*k*x/l)* Sin (Pi*n*y/m), x=0..l), y =0..m);
```

$$B_{k,n} := 0$$

С учетом 4 слогаемыми решение определяем форму колебании мембраны.

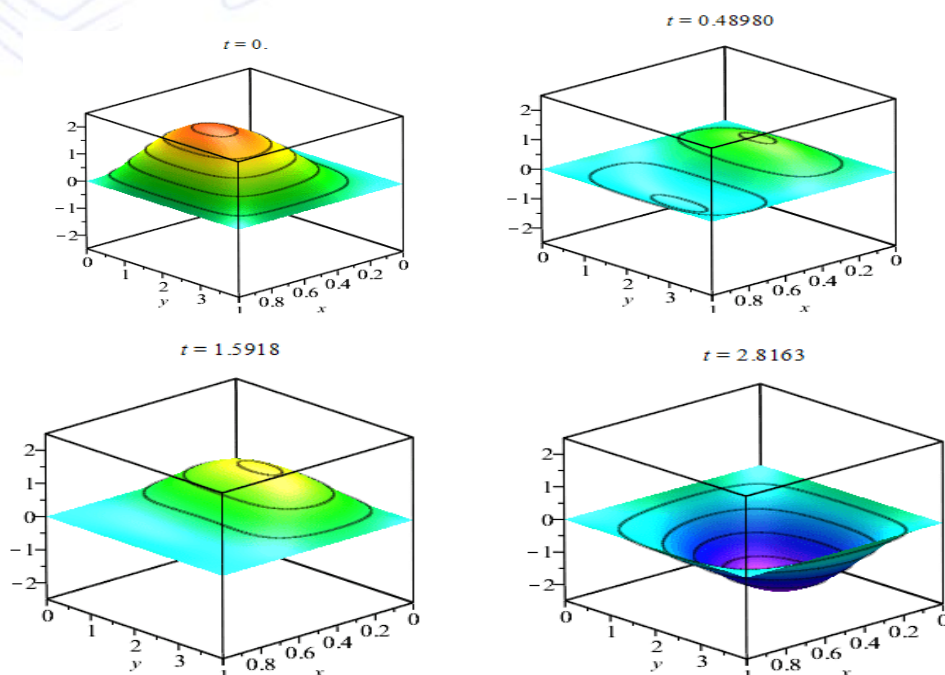
>
$$U(x,y,t) := \text{Sum}(\text{Sum}((A[k,n] * \cos(\omega[k,n] * t) + B[k,n] * \sin(\omega[k,n] * t)) * \sin(k * \pi * x / l) * \sin(n * \pi * y / m), k=1..4), n=1..4);$$

$$U(x, y, t) := \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\pi^7 k^4 n^3} \left(64 \left(\sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi^3 k^2 n + 2 \sin(\pi k) \cos(\pi n) \pi^2 k^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sin(\pi n) \cos(\pi k) \pi^2 k n - 2 \pi^2 \sin(\pi k) k^2 + 2 \sin(\pi n) \pi^2 k n \right. \right. \\ \left. \left. - 6 \sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi n + 8 \cos(\pi n) \cos(\pi k) \pi k + 4 \cos(\pi n) \pi k - 8 \pi k \cos(\pi k) \right. \right. \\ \left. \left. - 12 \sin(\pi k) \cos(\pi n) - 4 \pi k + 12 \sin(\pi k) \right) \right. \\ \left. \cos\left(\frac{\pi \sqrt{4k^2 + n^2} t}{2}\right) \sin(\pi k x) \sin\left(\frac{\pi n y}{2}\right) \right)$$

На основе анимированного графика решения показываем временные состояния вибрации:

>with (plots):

$$\text{animate}(\text{plot3d}, [U(x,y,t), x=0..1, y=0..m], t=0..3, \text{frames}=30, \text{axes}=\text{BOXED}, \text{title}=\text{"Колебания мембраны"}, \text{numpoints}=100, \text{lightmodel}=\text{light3}, \text{orientation}=[45,65], \text{shading}=\text{ZHUE}, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$$
 (рис.2)



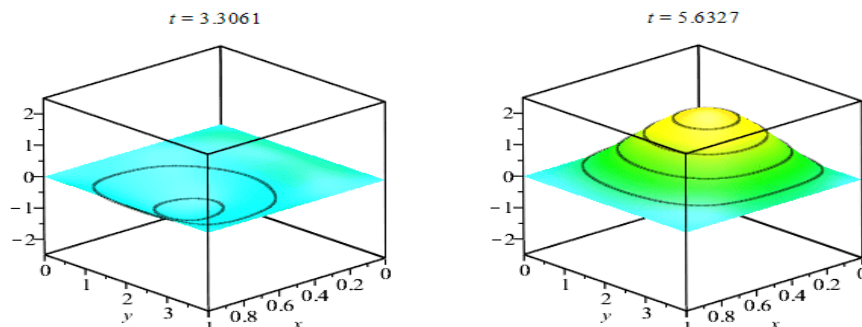


Рис. 2. Колебания мембраны во времени.

Пример.2. Определить колебания прямоугольной мембраны с размерами $l=1$, $m=4$ и с начальными условиями $F(x,y)=0$ и $f(x,y)=V0$.

Maple da sturi

> restart;

> a:=1; l:=1; m:=4; a:=1 l:=1

F:=(x,y)->0; F:=(x,y) → 0

F:=(x,y)->V0; f:=(x,y) → V0

> V0:=2;

> omega[k,n]:=Pi*a*sqrt(k^2*m^2+l^2*n^2)/(l*m);

$$\omega_{k,n} := \frac{\pi \sqrt{16k^2 + n^2}}{4}$$

> plot3d(f(x,y), x=-1..1, y=-m..m, axes=BOXED, lightmodel=light3, title="Начальный профиль мембраны", numpoints=1000, orientation=[45,65], shading=ZHUE, style=PATCHCONTOUR); (рис.3)

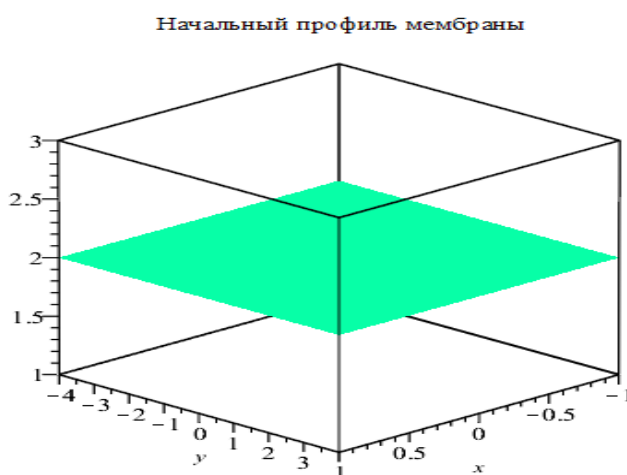


Рис. 3. Начальный профиль мембраны.


```
> A[k,n]:=4/(l*m)*int(int(F(x,y)*sin(Pi*k*x/l)* sin(Pi*n*y/m), x=0..l),y =0..m); Ak,n := 0
> B[k,n]:=4/(l*m*omega[k,n])*int(int(f(x,y)* sin(Pi*k*x/l)* sin(Pi*n*y/m),x=0..l),y =0..m);
```

$$B_{k,n} := \frac{32 (\cos(\pi n) \cos(\pi k) - \cos(\pi n) - \cos(\pi k) + 1)}{\pi^3 \sqrt{16k^2 + n^2} kn}$$

С учетом 4 слагаемыми решение определяем форму колебания мембраны.

```
> U(x,y,t):=Sum(Sum((A[k,n]*cos(omega[k,n]*t)+
B[k,n]*sin(omega[k,n]*t))*sin(k*Pi*x/l)*sin(n*Pi*y/m),k=1..4), n=1..4);
```

$$U(x, y, t) := \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\pi^3 \sqrt{16k^2 + n^2} kn} \left(32 (\cos(\pi n) \cos(\pi k) - \cos(\pi n) - \cos(\pi k) + 1) \sin\left(\frac{\pi \sqrt{16k^2 + n^2} t}{4}\right) \sin(\pi k x) \sin\left(\frac{\pi n y}{4}\right) \right)$$

На основе анимированного графика решения показываем временные состояния вибрации:

```
>with (plots): #V0:=2: title= "Колебания мембраны",
animate(plot3d,[U(x,y,t),x=0..2,y=0..2],t=0..4,frames=30,
axes=BOXED,lightmodel=light2,numpoints=20,shading=ZHUE,
style=PATCHCONTOUR); (рис.4)
```

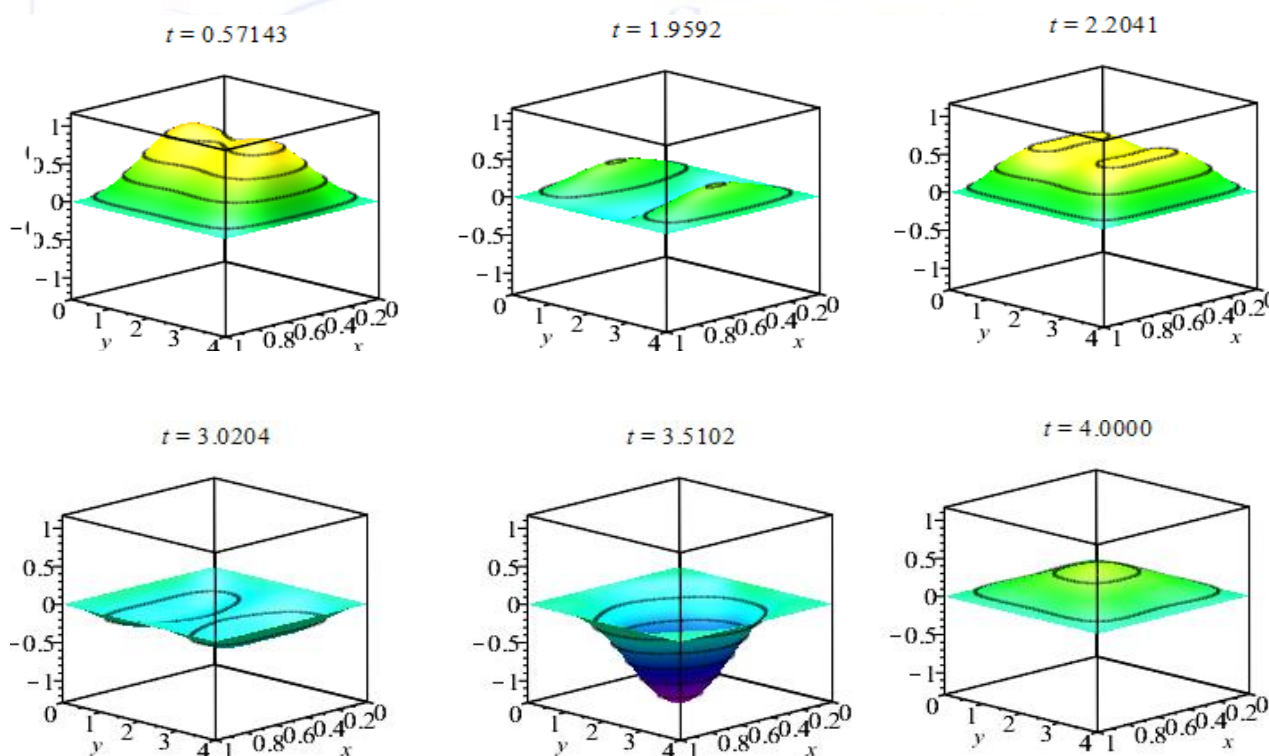


Рис. 4. Колебания мембраны во времени.

Пример.3. Определить колебания прямоугольной мембраны с размерами $l=1$, $m=4$ и с начальными условиями $F(x, y) = x^2(4-y)y(1-x)/4$ и $f(x, y) = x^2 + y$.

Maple da sturi

> restart;a:=1;l:=1;m:=4: a := 1 l := 1

> F(x,y):=4*x^2*(m-y)*y*(l-x)/(l*m)^2;

$$F(x, y) := \frac{x^2(4-y)y(1-x)}{4}$$

> f(x,y):=x^2+y;

$$f(x, y) := x^2 + y$$

> omega [k,n]:=Pi*a*sqrt(k^2*m^2+l^2*n^2)/(l*m);

$$\omega_{k,n} := \frac{\pi \sqrt{16k^2 + n^2}}{4}$$

>

plot3d(F(x,y),x=0..l,y=0..m,title="Начальныйпрофильмембраны",axes=BOXED,lightmodel=light3, numpoints=1000, orientation=[45,65],shading=ZHUE,style=PATCHCONTOUR);

(рис.5)

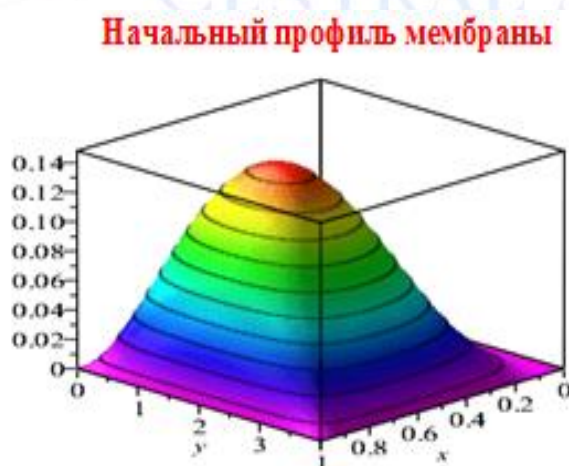


Рис.5. Начальный профиль мембраны.

> A[k,n]:=4/(l*m)*int(int(F(x,y)*sin(Pi*k*x/l)* sin(Pi*n*y/m), x=0..l),y =0..m);

$$A_{k,n} := \frac{1}{\pi^7 k^4 n^3} \left(16 \left(\sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi^3 k^2 n + 4 \cos(\pi k) \sin(\pi n) \pi^2 k n \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin(\pi k) \cos(\pi n) \pi^2 k^2 - 2 \sin(\pi k) \pi^2 k^2 + 2 \sin(\pi n) \pi^2 k n \right. \right. \\ \left. \left. + 8 \cos(\pi k) \cos(\pi n) \pi k - 6 \sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi n - 8 \pi k \cos(\pi k) + 4 \cos(\pi n) \pi k \right. \right. \\ \left. \left. - 12 \sin(\pi k) \cos(\pi n) - 4 \pi k + 12 \sin(\pi k) \right) \right)$$

> B[k,n]:=4/(l*m*omega[k,n])*int(int(f(x,y)* sin(Pi*k*x/l)* sin(Pi*n*y/m),x=0..l),y =0..m);

$$B_{k,n} := \frac{1}{\pi^5 \sqrt{16k^2 + n^2} k^3 n^2} \left(16 \left(5 \cos(\pi k) \pi^2 \cos(\pi n) k^2 n - \cos(\pi k) \pi^2 k^2 n \right. \right. \\ \left. - 4 \pi^2 \cos(\pi n) k^2 n - 4 \cos(\pi k) \pi \sin(\pi n) k^2 - 2 \pi k \sin(\pi k) \cos(\pi n) n \right. \\ \left. + 2 \pi k \sin(\pi k) n + 4 \pi \sin(\pi n) k^2 - 2 \cos(\pi k) \cos(\pi n) n + 2 \cos(\pi k) n + 2 n \cos(\pi n) \right. \\ \left. - 2 n \right) \left. \right)$$

С учетом 5 слагаемыми решение определяем форму колебании мембраны.

> U(x,y,t):=Sum(Sum((A[k,n]*cos(omega[k,n]*t)+B[k,n]*sin(omega[k,n]*t))*sin(k*Pi*x/l)*sin(n*Pi*y/m), k=1..5), n=1..5);

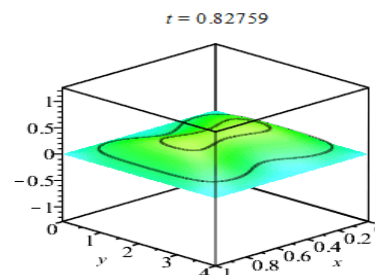
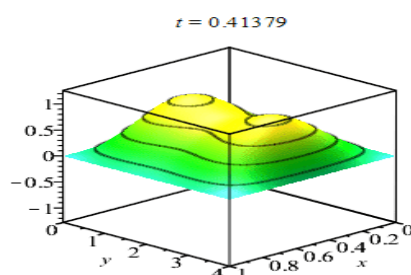
$$U(x,y,t) := \sum_{n=1}^5 \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{\pi^7 k^4 n^3} \left(16 \left(\sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi^3 k^2 n + 4 \cos(\pi k) \sin(\pi n) \pi^2 k n + 2 \sin(\pi k) \cos(\pi n) \pi^2 k^2 - 2 \sin(\pi k) \pi^2 k^2 \right. \right. \right. \\ \left. + 2 \sin(\pi n) \pi^2 k n + 8 \cos(\pi k) \cos(\pi n) \pi k - 6 \sin(\pi k) \sin(\pi n) \pi n - 8 \pi k \cos(\pi k) + 4 \cos(\pi n) \pi k - 12 \sin(\pi k) \cos(\pi n) \right. \\ \left. - 4 \pi k + 12 \sin(\pi k) \right) \cos \left(\frac{\pi \sqrt{16k^2 + n^2} t}{4} \right) \right) + \frac{1}{\pi^5 \sqrt{16k^2 + n^2} k^3 n^2} \left(16 \left(5 \cos(\pi k) \pi^2 \cos(\pi n) k^2 n \right. \right. \\ \left. - \cos(\pi k) \pi^2 k^2 n - 4 \pi^2 \cos(\pi n) k^2 n - 4 \cos(\pi k) \pi \sin(\pi n) k^2 - 2 \pi k \sin(\pi k) \cos(\pi n) n + 2 \pi k \sin(\pi k) n + 4 \pi \sin(\pi n) k^2 \right. \\ \left. - 2 \cos(\pi k) \cos(\pi n) n + 2 \cos(\pi k) n + 2 n \cos(\pi n) - 2 n \right) \sin \left(\frac{\pi \sqrt{16k^2 + n^2} t}{4} \right) \right) \sin(\pi k x) \sin \left(\frac{\pi n y}{4} \right)$$

На основе анимированного графика решения показываем временные состояния вибрации:

>with(plots): # title="Колебаниямембраны",

**>animate(plot3d,[U(x,y,t),x=0..l,y=0..m],t=0..6,
lightmodel=light2,numpoints=20,orientation=[45,65],
(рис.6)**

**frames=30, axes=BOXED,
shading=ZHUE,style=PATCHCONTOUR);**



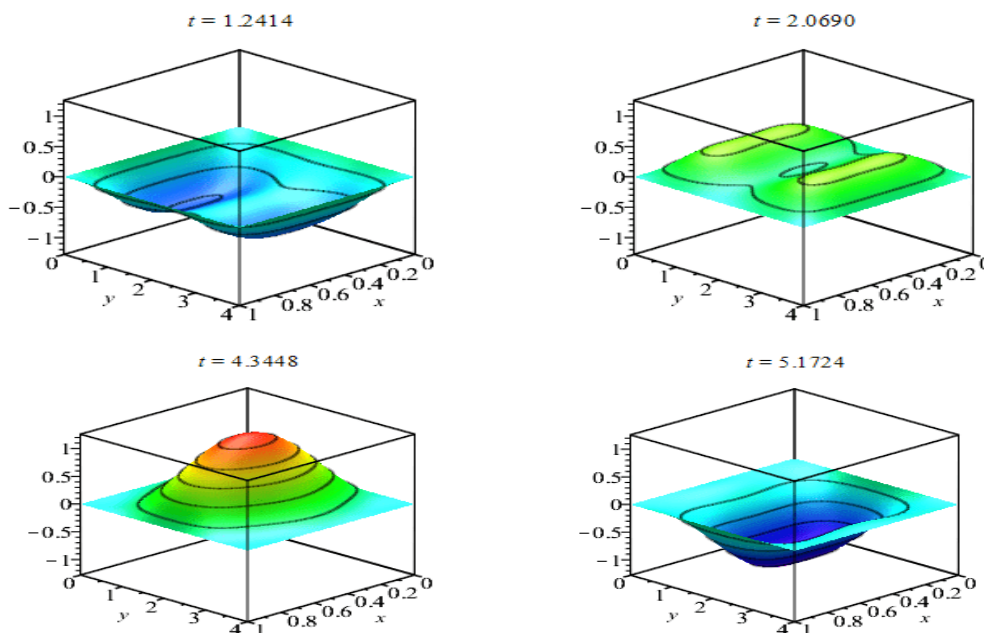


Рис.6. Колебания мембраны во времени.

Анализ полученных результатов. Система Maple может использоваться для быстрого, точного и качественного решения задач в разделах аналитической геометрии, математического анализа и математической физики высшей математики. Maple дает возможности решение инженерных задач и построения анимированного графики и фигур в 2D и 3D[1,3,4,5,7,8,9].

Заключение. Система Maple в последнее время стала полезной для многих пользователей персональных компьютеров, которые занимаются математическими вычислениями, простирающимися от решения учебных задач в вузах до моделирования сложных физических объектов, систем и устройств. Несомненно, любая научная лаборатория или кафедра вуза должны располагать математической системой, если они всерьез заинтересованы в автоматизации выполнения математических расчетов любой степени сложности[4].

Предлагаются учебное пособие созданный М.Е.Мирзакаримовым и изданный Министерством высшего образования, представляет собой учебник из трех частей «Решение задачи высшей математики с помощью программы Maple», который полезен учителям при обучении «Высшая математика» с использованием Maple[4].

Литературы

1. Голоскоков Д.П.(2015). Уравнения математической физики. Решение задач в среде Maple. Спб:Питер.
2. Тихонов А.Н.,Самарский А.А. (1999). Уравнения математической физики. М.: Наука.
3. Матросов А.В. (2001). Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб. БХВ-Петербург.
4. Mirzakarimov E.M. (2014, 2015). Maple dasturi yordamida Oliy matematika masalalarini yechish. 1, 2,3q, T. Adabiyot uchqunlari.
5. Mirzakarimov E.M.(2021).Maple tizimida to'g'ri to'rtburchakli membrananing erkin tebranishini aniqlash. *Scientific Bulletin of Namangan State University*1 (8), 3-9.

6. Mirzakarimov, E. M., & Fayzullaev, J. S. (2020). Improving the quality and efficiency of teaching by developing students* mathematical competence using the animation method of adding vectors to the plane using the maple system. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 2(9), 336-342.
7. Mirzakarimov, E. M., & Faizullaev, J. I. (2019). Method of teaching the integration of information and educational technologies in a heterogeneous parabolic equation. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 1(5), 13-17.
8. Mirzaboevich, M. E., &ugli, E. M. I. (2021). Using Maple Programs in Higher Mathematics. Triangle Problem Constructed on Vectors in Space. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, 2(11), 44-50. Retrieved from <http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS/article/view/123>
9. Мирзабоевич, М. Э. & Исмоилджонович, Ф. Д. (2021). Выполнять Линейные Операции Над Векторами В Пространстве В Системе Maple. *Centralasianjournalofmathematicaltheoryandcomputersciences*, 2(12), 10-16. Retrieved from <http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS/article/view/137>

