CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

Volume: 02 Issue: 06 | Jun 2021 ISSN: 2660-5309

ЗАДАЧА УБЕГАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕНИЕМ ГРОНУОЛЛА - БЕЛЛМАНА

***Саматов Бахром Тажиахматович*[1], *Ахмедов Олимхон Улугбек угли*[2]**

***Абдуманнопов Мухаммадсодик Мухаммадюсуф угли*[3]**

[1]*НамГУ, профессор кафедры дифференциальных уравнение*

[2]*ФерГУ, учитель кафедры математики*

[3]*ФерГУ, учитель кафедры математики*

Аннотация

В этом работе изучается задача убегания для дифференциальных игр первого порядка, когда управления игроков зависимы при ограничениях Гронуолла - Беллмана. Получены новые достаточные условия разрешимости для задачи убегания.

ARTICLEINFO

Article history:
Received 29April2021
Revised form 15 May 2021
Accepted 10Jun 2021

Ключевые слова: дифференциальная игра, скорость, ограничение Гронуолла - Беллмана, преследователь, убегающий, стратегия

Введение

Обычно предполагается, что ранняя выборка задач с преследованием и уклонением начинается с задачей, поставленной и решенной в 1732 году французским математиком, и гидрографом Пьером Бугером. Более поздняя трактовка истории появляется в книге П. Нахин. Но метод преследования-уклонения от задач начал систематически изучаться американским математиком Руфусом Айзексом в 50-х годах. Концепция «Дифференциальных игр» впервые появилась в нескольких его секретных работах по проекту корпорации RAND (США). Исследования Р. Айзека были опубликованы в виде монографий [13], в которых содержалось множество блестящих примеров дифференциальных игр. Автор рассматривал их как проблемы вариационного исчисления и пытался применить метод Гамильтона-Якоби, теперь известный как метод Исаакса. Но для классических методов предмет оказался сложнее. Идея, которую использовал Р. Айзек, носила исключительно эвристический характер. Тем не менее книга [13] вызвала интерес к новым проблемам. Именно тогда математики и механики, специалисты и любители начали рассматривать дифференциальные игры.

Дифференциальные игры, в которых управление выбиралось только из класса

Ограниченные функции выражают некоторые конструктивные возможности управляющего устройства. Стремление к большей адекватности математических моделей практическим задачам привело к необходимости изучения дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков. Такие ограничения выражают, например, ограничение контроля энергии, уменьшение других веществ, которые расходуются в процессе. Особенно при изучении математических моделей ограничений технических процессов такого рода это важно в научном и прикладном аспекте.

Современные дифференциальные игры как теория развития математические методы управления процессами, сочетающие в себе динамизм, управляемость, борьбу, осведомленность и оптимальное количество других важных качеств, и представляют собой одну из сложнейших математических моделей

реальных процессов, имеющих большое практическое значение. Основу теории положили математики У. Флеминг [10], А. Фридман [11], О. Хайек [12], Л.С. Понтрягин, Н. Красовский [16-17]. При этом авторы выработали собственный подход к теме. Его дальнейшее развитие было достигнуто многими специалистами [2-8, 9-10, 14-18].

В настоящее время существует более ста монографий по теория. Тем не менее, полностью решенных образцов дифференциальных игр довольно мало. Эта работа посвящена задачам уклонения для линейной дифференциальной игры и вводит несколько основных понятий как ограничения типа Гронуолла для управления игроками.

II. Постановка задачи

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ управляемый объект $\mathbf{P}$ (преследователь) преследует другой объект $\mathbf{E}$ (убегающий). Предположим, что x и y - это местоположения преследователя и убегающего соответственно, а x_0, y_0 $(x_0 \neq y_0)$ - их исходные местоположения. Движение объектов описывается уравнениями

$$\mathbf{P}: \dot{x} = u,\ x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}: \dot{y} = v,\ y(0) = y_0, \quad (2)$$

где $x, y, u, v \in \mathbf{R}^n,\ n \geq 2.$

В настоящее время понятие ограничения Гронуолла-Беллмана первого типа [1] для управления $u(\cdot)$ вводится в форме

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2\int_0^t l(s)|u(s)|^2\, ds \quad (3)$$

где ρ - неотрицательное число, а $l(s)$ - неотрицательная функция. Первый тип ограничений Гронуолла-Беллмана обобщает геометрические ограничения, когда $l(s) = 0$.

Аналогично, понятие ограничения Гронуолла-Беллмана первого типа для управления $v(\cdot)$ вводится в форме

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2\int_0^t l(s)|v(s)|^2\, ds \quad (4)$$

где σ - неотрицательное число, а $l(s)$ - неотрицательная функция.

Здесь u - вектор скорости преследователя, и здесь изменение u во времени должно быть измеримой функцией $u(\cdot):[0,+\infty) \to \mathbf{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{U}_{GB}$ множество всех измеримых функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению Гронуолла-Беллмана (3) (кратко, GB -ограничение).

Аналогично v- вектор скорости убегающего, а здесь временная изменение v должна быть измеримой функцией $v(\cdot):[0,+\infty) \to \mathbf{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{V}_{GB}$ множество всех измеримых функций $v(\cdot)$, удовлетворяющих GB -ограничению (4).

Определение 1. Для тройки из $(x_0, u(\cdot)),\ u(\cdot) \in \mathbf{U}_{GB}$ решение уравнения (1), то есть

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)\,ds$$

называется траекторией преследователя на интервале $t \geq 0$.

Определение 2. Для тройки из $(y_0, v(\cdot))$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{GB}$ решение уравнения (1), то есть

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)\,ds$$

называется траекторией убегающего на интервале $t \geq 0$.

Определение 3. Пара классов допустимых управлений, введенная $(\mathbf{U}_{GB}, \mathbf{V}_{GB})$, определяет дифференциальную игру (1) - (4) с ограничениями типа Гронуолла-Беллмана или, кратко, GB-игру.

Определение 4. Для дифференциальной игры (1) - (2) проблема уклонения называется выполненной, однако преследователь выбирает любую управляющую функцию $\forall u(\cdot) \in GB_P$, если для убегающего существует $\exists v^*(\cdot) \in GB_E$ и выполняется следующее условие для траекторий $x(t), y(t)$ которое находится в соответствии с этими функциями управления:

$$x(t) \neq y(t), (t \geq 0)$$

Для решения проблемы уклонения мы предложим следующую стратегию убегающего:

Определение 5. В дифференциальной игре (1) - (2) стратегию убегающего назовем следующей функцией:

$$V_{GB}(t) = -\sigma e^{\int_0^t k(s)ds} \xi_0 \quad (5)$$

где $\xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$.

Лемма. Предположим, что отображение $U(t) : [0, \infty) \to \boldsymbol{R^n}$ - ограниченная неотрицательная и измеримая функция. Более того, $l \geq 0$ и $\rho > 0$ постоянны, и для данного, если выполняется неравенство $|U(t)|^2 \leq \rho^2 + 2\int_0^t l(s)|U(s)|^2\,ds$, то всегда верно соотношение

$$U(t) \leq \rho e^{\int_0^t l(s)ds} \quad (3^*).$$

Теорема. Если выполняется следующие условия для дифференциальной игры в ограничения GB

$$\rho \leq \sigma,\ k(t) \geq 0 \text{ и } t \geq 0$$

то дифференциальной игры в ограничение GB задача убегания называется решенным.

Доказательство.

$$|V_{GB}(t)|^2 = \sigma^2 e^{2\int_0^t k(s)ds}$$

заменим правую часть уравнения функцией, большей, чем она сама:

$$\left|V_{GB}(t)\right|^2 \le \sigma^2 + 2\int_0^t k(s)\sigma^2 e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau} ds$$

Используя (5) мы получим следующую неравенство

$$\sigma^2 e^{2\int_0^t k(s)ds}\xi_0^2 \le \sigma^2\left(1+2\int_0^t k(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau} ds\right)$$

σ^2 отлично от нуля мы можем поделит обе стороны неравенство на σ^2, и зная что $\xi_0^2 = 1$ то имеем:

$$e^{2\int_0^t k(s)ds} \le 1+2\int_0^t k(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau} ds \quad (6)$$

(6) если проинтегрировать переменную под дифференциалом в интеграле в правой части неравенства, получим следующее неравенство:

$$e^{2\int_0^t k(s)ds} \le 1+\int_0^t d\left(e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}\right) = 1+e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}\Big|_0^t =$$

$$= 1+e^{2\int_0^t k(s)ds} - 1 = e^{2\int_0^t k(s)ds}$$

$$\dot{z} = U_{GB}(t,v(t)) - V_{GB}(t),\ z(0) = z_0$$

Интегрируем оба части равенство:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t U(s)ds - \int_0^t V_{GB}(s)ds =$$

$$= z_0 + \sigma\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau} ds + \int_0^t U(s)ds$$

$$\left|z(t)\right| = \left|z_0 + \sigma\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}\xi_0 - \int_0^t U(s)ds\right|$$

открываем модуль по отдельно

$$\left|z(t)\right| \ge \left|z_0\right| + \left|\sigma\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}\xi_0\right| - \int_0^t \left|U(s)\right|ds$$

$\int_0^t \left|U(s)\right|ds$ заменим его на функцией которая больше, чем она сама из неравенство (3*) :

$$\left|z(t)\right| \ge \left|z_0\right| + \sigma\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau} ds - \rho\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau} ds =$$

$$= \left|z_0\right| + (\sigma-\rho)\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau} ds > 0$$

для всех $\sigma > 0$ и $\rho > 0$ удовлетворявший $\sigma - \rho \ge 0$ неравенство

$$\left|z_0\right| + (\sigma-\rho)\int_0^t e^{\int_0^s k(\tau)d\tau} ds > 0 \quad (7)$$

неравенство всегда верна. Для любой $t \ge 0$ где, $\rho \le \sigma$ $k(t) \ge 0$ то в GB дифференциальная игре задача убегания читается разрешимой.

Литературы.

[1] Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 1919, 20(2): 293-296.

[2] Azamov A.A. About the quality problem for the games of simple pursuit with the restriction, Serdika. Bulgarian math. spisanie, 12, 1986, - P.38-43.

[3] Azamov A.A., Samatov B.T. П-Strategy. An Elementary introduction to the Theory of Differential Games. - T.: National Univ. of Uzb., 2000. - 32 p.

[4] Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: Analogies and Appli-cations, The Fourth International Conference Game Theory and Management, June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. - P.33-47.

[5] Azamov A., Kuchkarov A.Sh. Generalized 'Lion Man' Game of R. Rado, Contributions to game theori and management. Second International Conference "Game Theory and Management" - St.Petersburg, Graduate School of Manage-ment SPbU. - St.Petersburg, 2009. - Vol.11. - P. 8-20.

[6] Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Samatov B.T. The Relation between Problems of Pursuit, Controllability and Stability in the Large in Linear Systems with Different Types of Constraints, J.Appl.Maths and Mechs. - Elsevier. - Netherlands, 2007. - Vol. 71. - N 2. - P. 229-233.

[7] Barton J.C, Elieser C.J. On pursuit curves, J. Austral. Mat. Soc. B. - London, 2000. - Vol. 41.- N 3. - P. 358-371.

[8] Borovko P., Rzymowsk W., Stachura A. Evasion from many pursuers in the simple case, J. Math. Anal. And Appl. - 1988. - Vol.135. - N 1. - P. 75-80.

[9] Chikrii A.A. Conflict-controlled processes, Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1997, 424 p.

[10] Fleming W. H. The convergence problem for differential games, J. Math. Anal. Appl. - 1961. - N 3. - P. 102-116.

[11] A. Friedman. Differential Games, New York: Wiley, 1971, - 350 p.

[12] Hajek O. Pursuit Games: An Introduction to the Theory and Appli-cations of Differential Games of Pursuit and Evasion. - NY.:Dove. Pub. 2008. - 288 p.

[13] Isaacs R. Differential Games, J. Wiley, New York-London-Sydney, 1965, 384 p.

[14] Ibragimov G.I. Collective pursuit with integral constrains on the controls of players, Siberian Advances in Mathematics, 2004, v.14, No.2, - P.13-26.

[15] Ibragimov G.I., Azamov A.A., Khakestari M. Solution of a linear pursuit-evasion game with integral constraints, ANZIAM Journal. Electronic Supplement. - 2010. - Vol.52. - P. E59-E75.

[16] Krasovskii A.N., Choi Y.S. Stochastic Control with the Leaders-Stabilizers. - Ekaterinburg: IMM Ural Branch of RAS, 2001. - 51 p.

[17] Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. - Berlin etc.: Birkhauser, 1995. – 322, p.

[18] Samatov B.T., Axmedov O.U., Doliyev O.B. The strategy of parallel pursuit for differential game of the first order with Gronwall-Bellman constraints. – Namdu Ilmiy axborotnomasi 4-son, 2020 y. 15-20 b.